determinante di una matrice $\in \mathbb{K}^{n,n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \longrightarrow I$$

$$\det(A) = c \cdot \det(I)$$

1) Scambiare 2 colonne fra loro
2) Moltiplicare la I colonna per $a \neq 0$
3) Sommare alla I colonna una c. lineare delle rimanenti:

$$A \to AL \quad \text{dove } L \text{ matrice opportuna.}$$

$L \rightarrow$

$$P_{1,j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ 1 & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$\uparrow 1 \qquad \uparrow j$

scambio colonna i e colonna j

$$P_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & 1 & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$\uparrow i \qquad \uparrow j$

$$\det(P_{ij}) = -1$$

moltiplico I colonna per a

$$M_a := \begin{bmatrix} a & & 0 \\ & 1 & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(M_a) = a$$

somma a I colonna $d_2 C_2 + \dots + d_n C_n$

$$C_{d_2 \dots d_n} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ d_2 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ d_n & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(C_{d_2 \dots d_n}) = 1$$

$$\det(A) = \det(I) = 1 = \det(A L_1 \dots L_s)$$

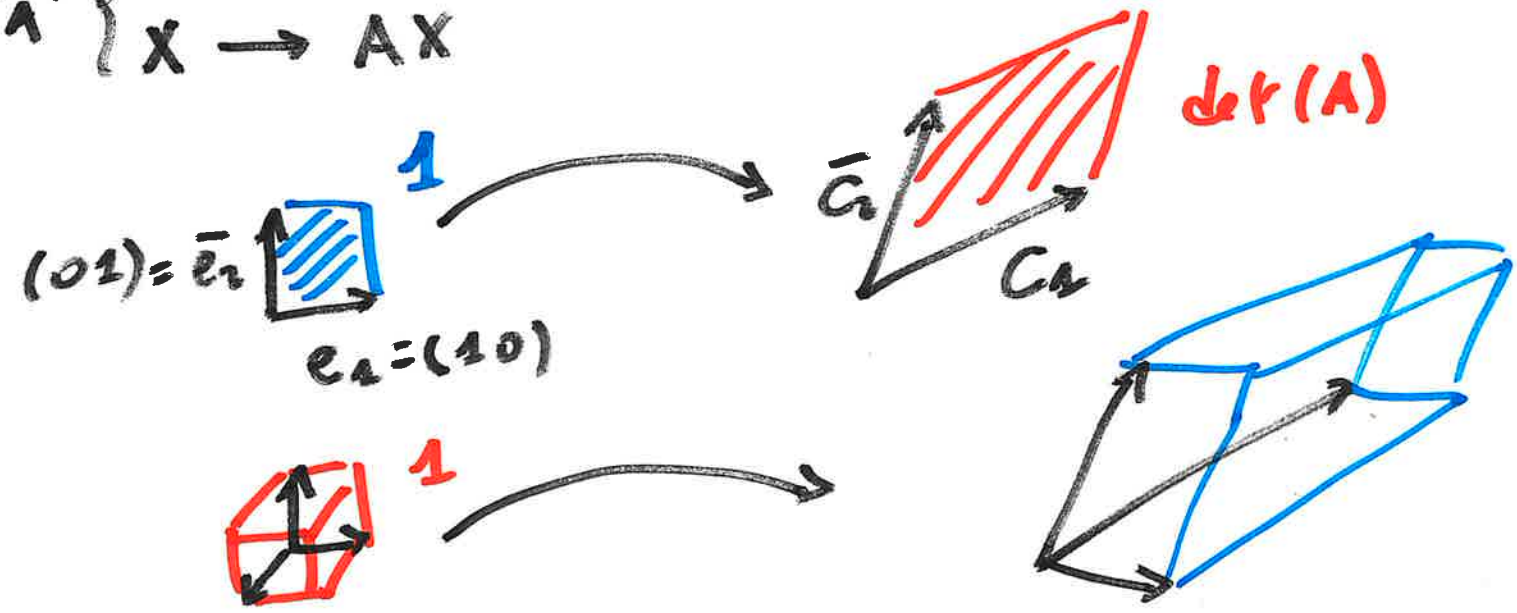
dove $L_1 \dots L_s \in \{ P_{i,j}, M_a \, a \neq 0, C_{d_2 \dots d_n} \}$

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$$

Teorema di Binét

$$\det(A) = \begin{cases} 0 \\ \text{oppure } \det(L_1 \dots L_n)^{-1} \end{cases}$$

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \longrightarrow AX \end{cases} \qquad \bar{e}_i \longrightarrow C_i$$



I Teorema di Laplace.

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$$

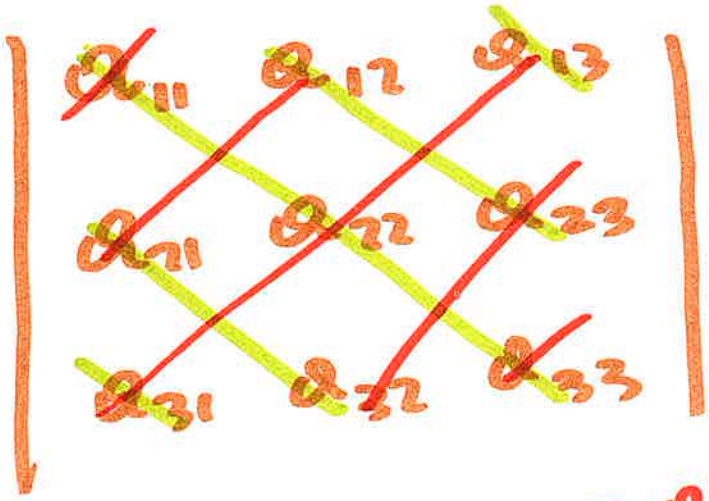
- $\det(a_{11}) = a_{11}$
- $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}) =$ (i fissato)

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$ (j fissato.)

A_{ij} = matrice ottenuta da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

OSS: Una matrice A è invertibile $\iff \det(A) \neq 0$.

$\rightarrow GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n,n} \mid \det(A) \neq 0\}$.

è un gruppo (non commutativo!)

gruppo generale lineare.

DIM $\det(A) \neq 0 \iff$ le colonne di A sono lin. indip.

$\iff$ le colonne di A sono una base di $\mathbb{K}^n$

$\iff$ A è una matrice di cambiamento di base

dalla base canonica $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

nella base formata dalle sue colonne.

Sia ora A' la matrice associata al cambio di base inverso.

$$X = AX'$$

$\forall X \in \mathbb{K}^n$

ove

X' = comp. rispetto $(c_1 \dots c_n)$

e X = comp. rispetto $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$.

$$X' = A'X$$

$$X = AA'X \qquad \forall X \Rightarrow AA' = I$$

$$\Rightarrow A' = A^{-1}$$

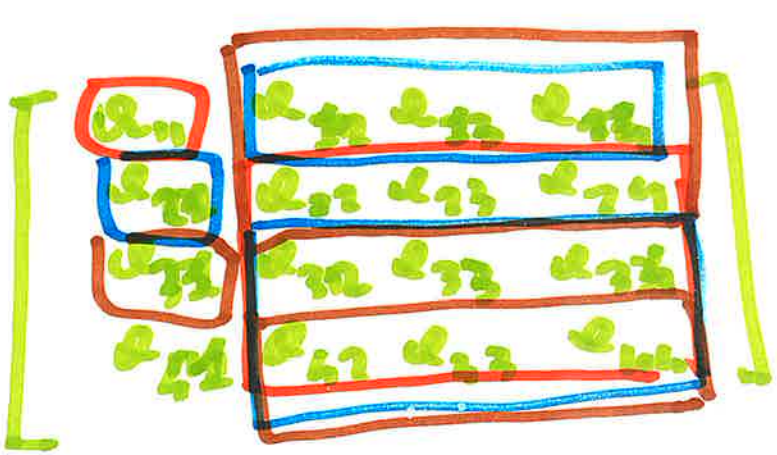
□

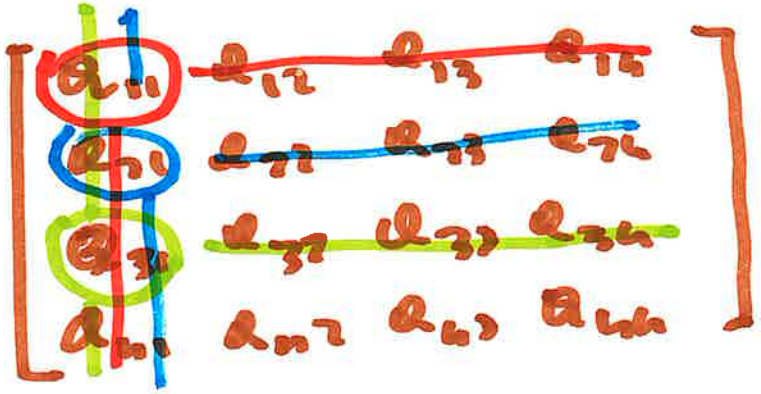
CALCOLO DELL' INVERSA DI $A \in GL(n, \mathbb{K})$.

II Teorema di Laplace.

$$A \in \mathbb{K}^{n,n} \Rightarrow$$

$$\forall j,k: \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ik}) = \begin{cases} 0 \text{ se } k \neq j \\ \det(A) \text{ se } k = j \end{cases}$$





$i = 1 \dots 4$

$j = 1 \quad k = 2$

$$a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{41}(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$=$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

due colonne identiche → la colonna j compare 2 volte (in pos. j e k).

Tecnica per calcolare la matrice inversa (se esiste)

$A = ((a_{ij}))_{i,j=1}^{n}$ $\qquad \Gamma_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

$$A^a = ((\Gamma_{ji}))_{i,j=1}^{n}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{11} = a_{22}$$

$$\Gamma_{12} = a_{21}(-1)$$

$$\Gamma_{21} = a_{12}(-1)$$

$$\Gamma_{22} = a_{11}$$

$$A^a = {}^t\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{21} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Teorema: $A \cdot A^a = \det(A)\, I$ $\Rightarrow$ se $\det(A) \neq 0$

$\Rightarrow A^{-1} = \det(A)^{-1} A^a$

DIM:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+k} \det(A_{ik}) \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Gamma_{ik}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(-1)^{j+k}\det(A_{kj}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\Gamma_{kj} = [a_{i1}\cdots a_{in}]\begin{bmatrix}\Gamma_{k1}\\ \vdots \\ \Gamma_{kn}\end{bmatrix} =$$

$$= 0 \text{ se } k \neq i$$

$$\det(A) \text{ se } k = i$$

$$\begin{matrix} R_1 \to \\ \\ R_n \to \end{matrix}\begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Gamma_{11}\cdots \Gamma_{n1} \\ \Gamma_{12} \quad \vdots \\ \vdots \\ \Gamma_{1n} \quad \Gamma_{nn}\end{bmatrix} = ((R_i C'_j))_{i,j=1}^{n} =$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ C'_1 & C'_n \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)\, I.$$

□

$$A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot A^{\#}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & -a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11} \\ a_{21}a_{22} - a_{21}a_{22} & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{bmatrix} =$$

$= \det(A)\, I.$

COMPUTAZIONALMENTE LA FORMULA DI LAPLACE APPLICATA AI DET. HA COMPLESSITÁ

n^2 DETERMINANTI DI $(n-1)\times(n-1)$

$\downarrow$

$(n-1)!$

$\rightarrow$ # operazioni $n^2(n-1)!$

ALGORITMO DI GAUSS

$$A\,(L_1 \dots L_s) \longrightarrow I$$

↑ operazioni fondamentali

$$A\underbrace{(L_1 \dots L_s)}_{A^{-1}} = I$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\forall i$

$\rightarrow a_{11} = 0$ e $\forall i \;\; a_{1i} = 0$

$\Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow A$ non è invertibile.

$\rightarrow$ se $a_{11} = 0$ e $\exists i > 1 : a_{1i} \neq 0$

scambio la I colonna di A con la i-a.

$A P_{1,i}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \neq 0 & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{m1} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$(A P_{1,i}) M_{a_{11}^{-1}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}/a_{11} & \\ \vdots & \\ a_{m1}/a_{11} & \end{bmatrix}$$

$I P_{1,i}$

$(I P_{1,i}) M_{a_{11}^{-1}}$

Sottraggo ad ogni colonna $i > 1$ $a_{1i} \cdot C_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & & & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\left(\left(\underline{I} P_{2,i} \right) M_{a'^{-1}_{11}} L_4 \dots L_5 \right)$$

$\exists$ nella II riga una entrata a'_{2j} con $j \geq 2$ non nulla.

se $a'_{2j} \neq 0 \Rightarrow$ OK ALTRIMENTI SCAMBIAMO II colonna

e prima colonna non nulla;

→ DIVIDIAMO II colonna per a'_{22}

→ ANNULLIAMO CON C. LINEARI TUTTI I COEFF DELLA II

riga $\neq a'_{22}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \square & \square & \end{bmatrix}$$

continuiamo visto che non raggiungiamo I.

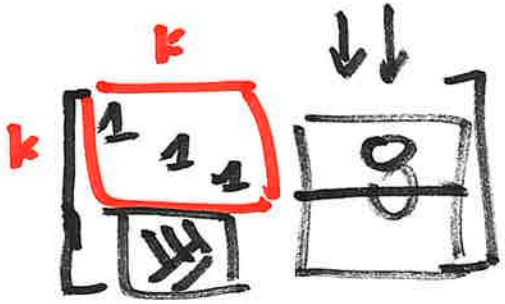
Oss: Il det è definito solo per matrici quadrate su $\mathbb{K}$.

→ vogliamo usarlo in qualche modo per calcolare il rango di matrici $\in \mathbb{K}^{m,n}$.

$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$

$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathcal{L}(C_A) = \mathrm{rk}(f) = \mathrm{rk}(A)$.

A = matrice associata ad f



se applichiamo ad di Gauss per colonne ad una matrice rettangolare di rango k

OTTENIAMO: Una matrice a blocchi $\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ X & 0 \end{bmatrix}$

→ in questa matrice la sottomatrice di ordine massimo con $\det \neq 0$ ha dimensione $k \times k$

Teorema: Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$

Allora A ha rango $k \iff$

il più grande minore di A con $\det \neq 0$ è una sottomatrice $k \times k$.

$\iff \exists M$ minore di A, $M \in \mathbb{K}^{k,k}$ con $\det(M) \neq 0$ ed ogni minore di ordine superiore ha $\det = 0$.